

Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

Τράπεζα θεμάτων

4-4-2022

Εκφωνήσεις



Στέλιος Μιχαήλογλου – Δημήτρης Πατσιμάς – Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ
ΘΕΜΑ 2ο

14226.α) Να κατασκευάσετε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους με συντελεστές διάφορους του μηδενός, το οποίο να είναι αδύνατο. (Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις του συστήματος που ορίσατε στο α) ερώτημα και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

14227. Δίνεται η εξίσωση: $8x + 2y = 7$ (1)

α) Να γράψετε μια άλλη εξίσωση που να μην έχει καμία κοινή λύση με την εξίσωση (1). (Μονάδες 10)

β) Να παραστήσετε γραφικά στο επίπεδο τις δυο εξισώσεις και, με βάση το γράφημα, να εξηγήσετε γιατί το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 15)

14228. Δύο φίλοι, ο Μάρκος και ο Βασίλης, έχουν άθροισμα ηλικιών 27 χρόνια, και ο Μάρκος είναι μεγαλύτερος από το Βασίλη.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Δίνεται επιπλέον η πληροφορία ότι η διαφορά των ηλικιών τους είναι 5 χρόνια. Να υπολογίσετε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

14281. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1) \cdot x + 2y = 3 \\ 4x + (\lambda - 1)y = -6 \end{cases}$$
, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\lambda = -3$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Να βρείτε μια λύση. (Μονάδες 8)

β) Αν $\lambda = 3$, να δείξετε ότι το σύστημα είναι αδύνατο. (Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda = 0$, να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 9)

14285. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2x + y = 5$, $\varepsilon_2 : -2x + 3y = -9$ και $\varepsilon_3 : 3x + 2y = 7$.

α) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_2 .

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_3 . (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α), να δείξετε ότι το κοινό σημείο των ε_2 και ε_3 είναι σημείο της ε_1 . (Μονάδες 13)

14321. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$ και $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$.

α) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M. (Μονάδες 13)

β) Να δείχθεί ότι η ευθεία $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$ διέρχεται από το M. (Μονάδες 12)

15006.α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$$
. (Μονάδες 13)

β) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών $\varepsilon_1 : 2x - 4y = -2$ και $\varepsilon_2 : 5x - 10y = 3$; (Μονάδες 12)

15016. Δίνεται το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος (0,4) δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1) : 3x + 2y = 8$ και $(\varepsilon_2) : 2x - y = 3$. (Μονάδες 7)

15195.α) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$
. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες $(\varepsilon_1) : 5x - y = -1$ και $(\varepsilon_2) : 3x + y = 2$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 4ο

14289. Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

1. Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
2. Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
3. Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.

- α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας. (Μονάδες 10)
 β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα. (Μονάδες 15)

15117. Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλλει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 ^ο	2	4	0	0,3€	3,8€
2 ^ο	1	2	3	0,3€	3,55€
3 ^ο	3	0	3	0,3€	4,05€
4 ^ο	2	2	1	0,3€	
				Σύνολο	

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (Μονάδες 9)
 β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν. (Μονάδες 10)
 γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερις φίλοι για την παραγγελία τους; (Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 3ο

14237. Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με $\frac{11}{3}$. Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115

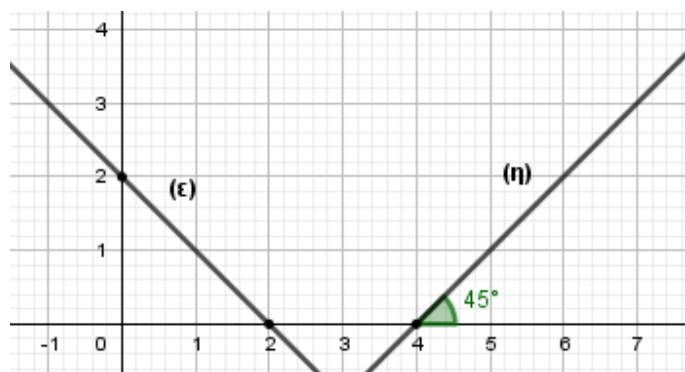
χρόνια.

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους. (Μονάδες 13)
 β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

14235. α) Με βάση τα δεδομένα του παρακάτω σχήματος, να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε) και (η).

(Μονάδες 12)

- β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών (ε) και (η). (Μονάδες 13)



Μη γραμμικά συστήματα

Θέμα 2ο

14278.α) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα: $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$ (Μονάδες 15)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις λύσεις του συστήματος που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 10)

Θέμα 4ο

14240.α) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) και του τριγωνομετρικού κύκλου, να βρείτε όλες τις γωνίες ω , με $0 \leq \omega \leq 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \omega + \eta \mu \omega = -1$ και να τις απεικονίσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. (Μονάδες 13)

15118.α) Να λύσετε το σύστημα $(\Sigma_1): \begin{cases} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$. (Μονάδες 8)

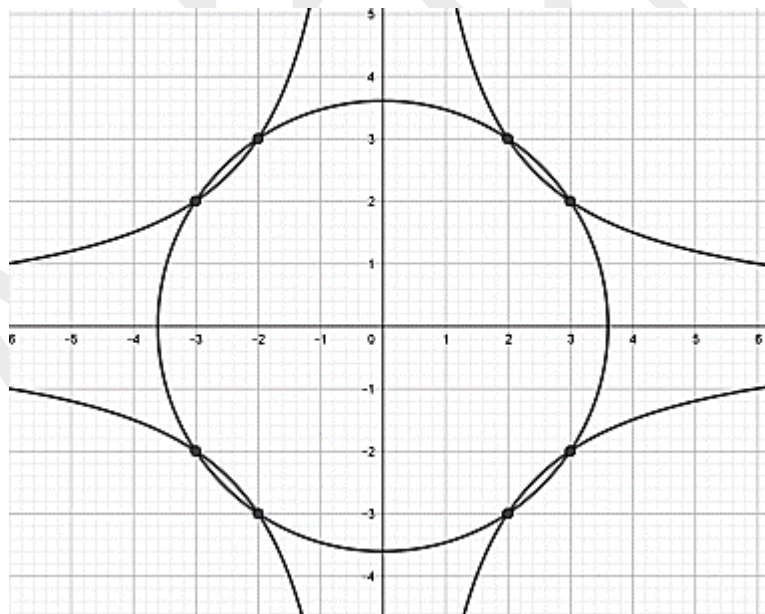
β) Είναι όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του $(\Sigma_2): \begin{cases} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$; Να αιτιολογήσετε την

απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Η γεωμετρική αναπαράσταση του συστήματος (Σ_2) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Με βάση το σχήμα,

i. να βρείτε τις λύσεις του (Σ_2) . (Μονάδες 4)

ii. να παραστήσετε γεωμετρικά το σύστημα (Σ_1) σημειώνοντας τις λύσεις του. (Μονάδες 8)



Θέμα 3ο

14979. Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$.

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ) . (Μονάδες 12)

β) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος (Σ) που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 13)

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 2ο

14283. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να απαντήσετε τα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $f(x_1)$, $f(x_2)$ και $f(x_3)$.

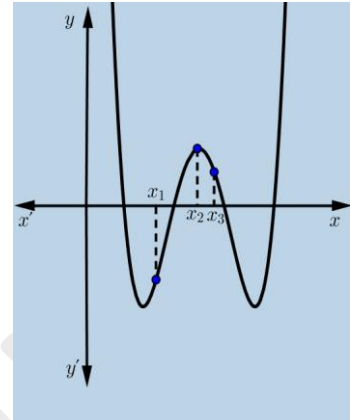
(Μονάδες 10)

β) Είναι η συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Παρουσιάζει η f μέγιστο στο σημείο x_2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



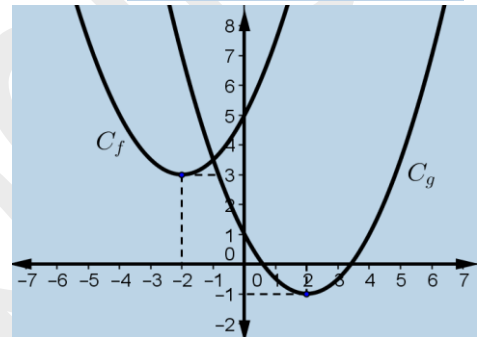
14287. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι παραβολές C_f και C_g που είναι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση. Παρατηρώντας το σχήμα:

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε μέσω ποιων μετατοπίσεων της C_f προκύπτει η C_g .

(Μονάδες 15)



14325. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

α) Τα διαστήματα μονοτονίας της f , το είδος του ακρότατου της f και την τιμή του.

(Μονάδες 15)

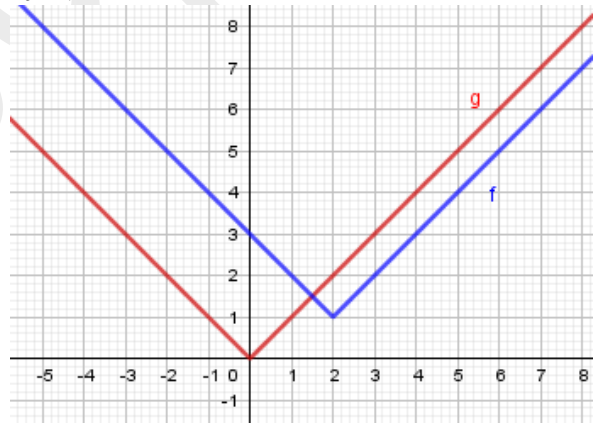
β) Αν $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

$$f(x) = |x+2|+1$$

$$f(x) = |x-2|-1$$

$$f(x) = |x+2|-1$$

$$f(x) = |x-2|+1$$



14971. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου $A(1,1)$, $B(3,3)$.

α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση f , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα A και B .

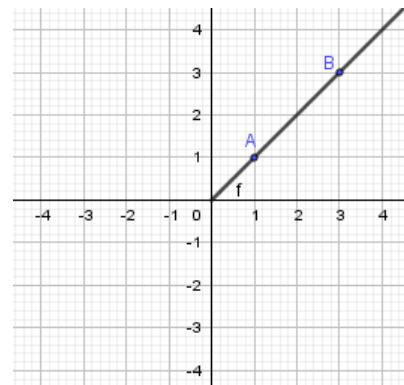
i) είναι σταθερή συνάρτηση

ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

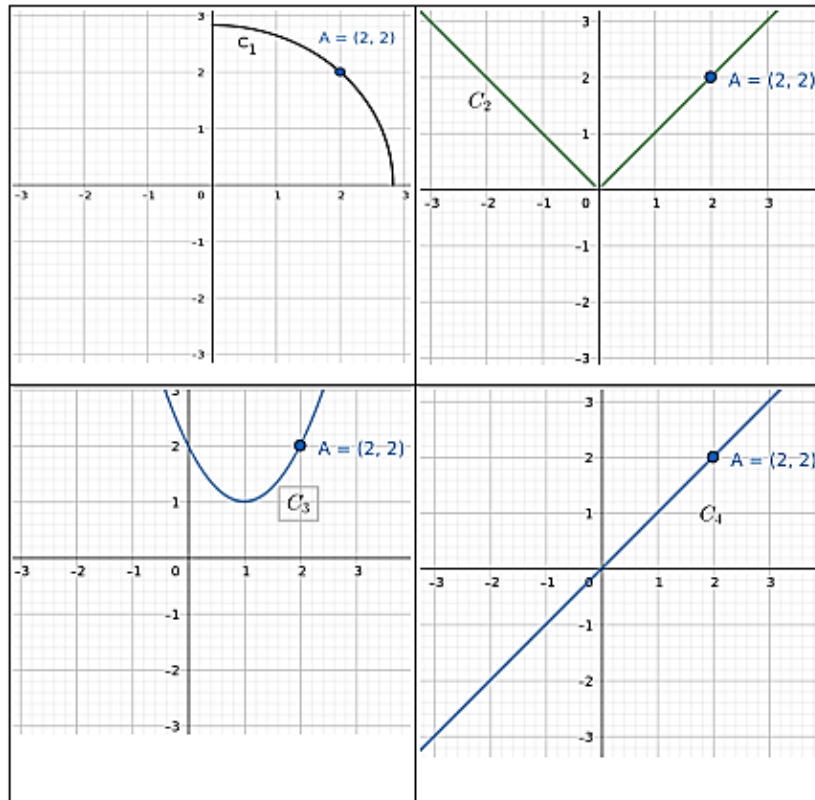
Μονάδες 12

β) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f , η οποία διέρχεται από τα A, B και είναι περιττή.

Μονάδες 13



14976. Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



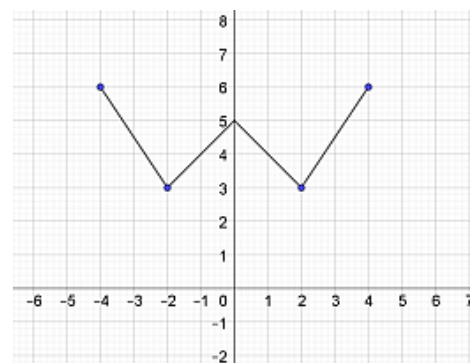
- α) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3, C_4 αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή. (Μονάδες 12)
- β) Για τις συναρτήσεις C_2, C_4 να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους $B(-2, k)$, αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης. (Μονάδες 13)

15019. Δίνεται μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2$ και $f(1) = 0$. Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

- α) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι άρτια. (Μονάδες 8)
- β) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι περιττή. (Μονάδες 8)
- γ) γιατί η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 9)

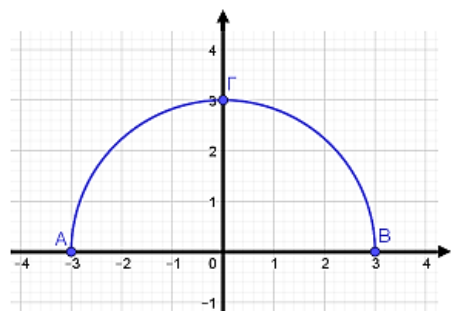
15024. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[4, 4]$ – φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

- α) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια. (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f . (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και για ποιες τιμές του x τις παρουσιάζει. (Μονάδες 9)



16129. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 6)
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της f και τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 10)



15112. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

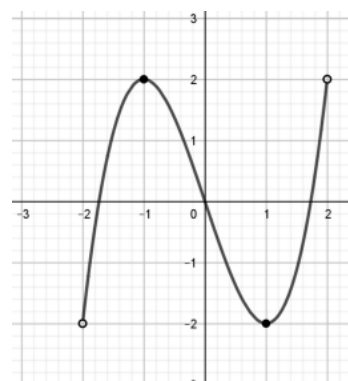
(Μονάδες 7)

β) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 10)

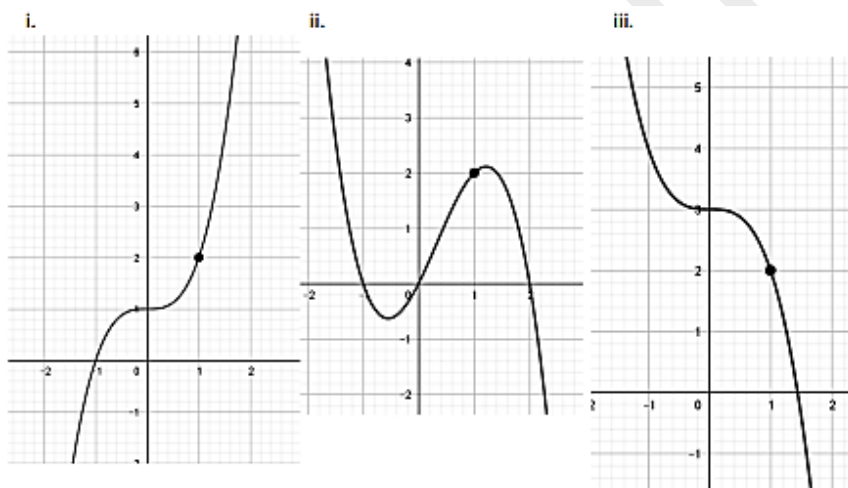


15114. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 9)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



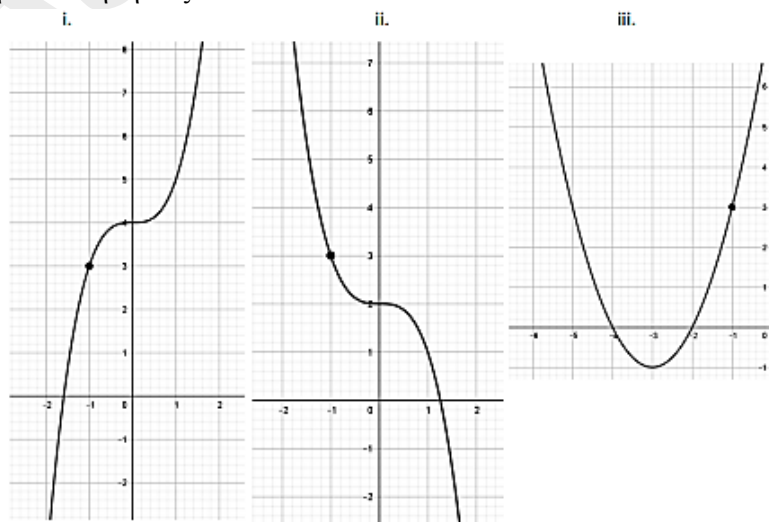
(Μονάδες 12)

15115. Δίνεται μια συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$.

α) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται και από το σημείο $B(2, 5)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της f ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

15116. Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.

α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

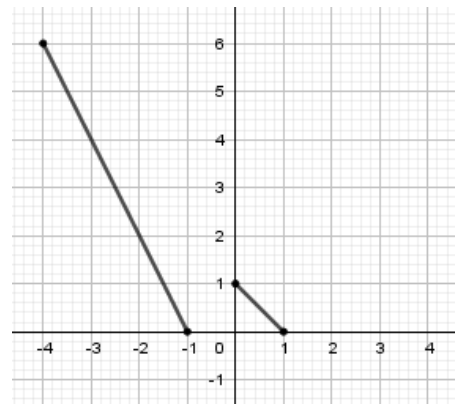
β) Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

(Μονάδες 9)



Θέμα 4ο

14241. Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m.

Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

(Μονάδες 7)

β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με E το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το E ως συνάρτηση του x .

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της $E(x)$. Από τη γραφική παράσταση της $E(x)$ να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν.

(Μονάδες 10)

14293. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

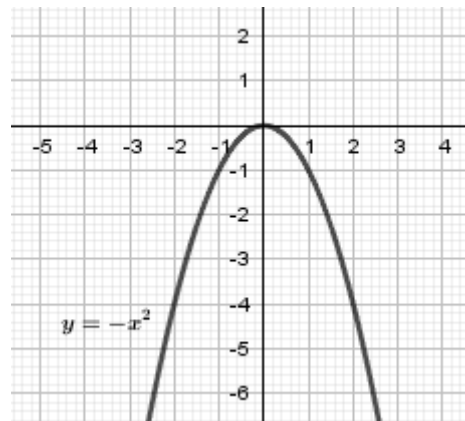
ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = k$, $k < 2$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



14294. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής

$f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$

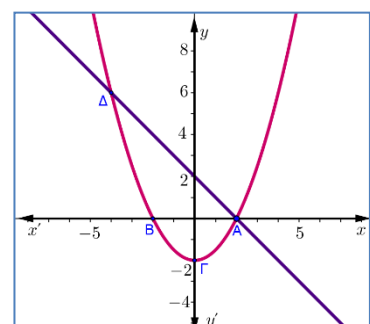
α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ, να βρείτε τα a , b , γ .

(Μονάδες 8)

β) Αν $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες

των κοινών σημείων ευθείας και παραβολής.

(Μονάδες 8)



γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 9)

15022. Θεωρούμε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$. Η συνάρτηση f είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) < f(2)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3, 3]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου. (Μονάδες 6)

δ) Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

Θέμα 2ο

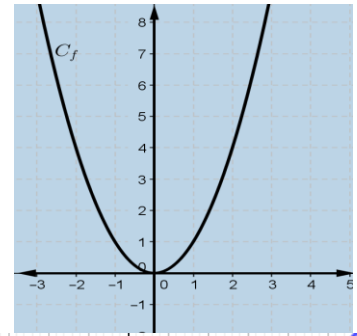
14230. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 12)

β) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , μετατοπίζοντας κατάλληλα την $y = x^2$.

(Μονάδες 13)

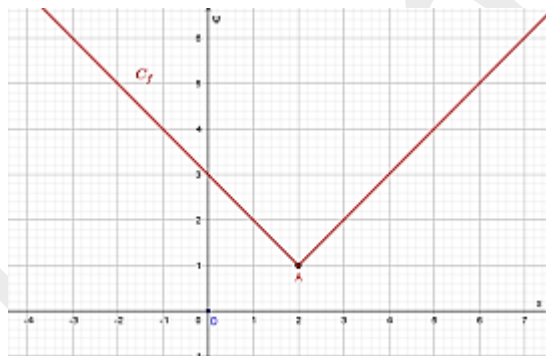
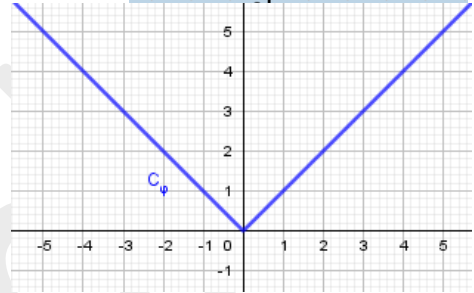


14972. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις $g(x) = |x - 2|$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = |x - 2| + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g , f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της, η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

- i.** Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.
- ii.** Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

14983. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική

παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$

και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

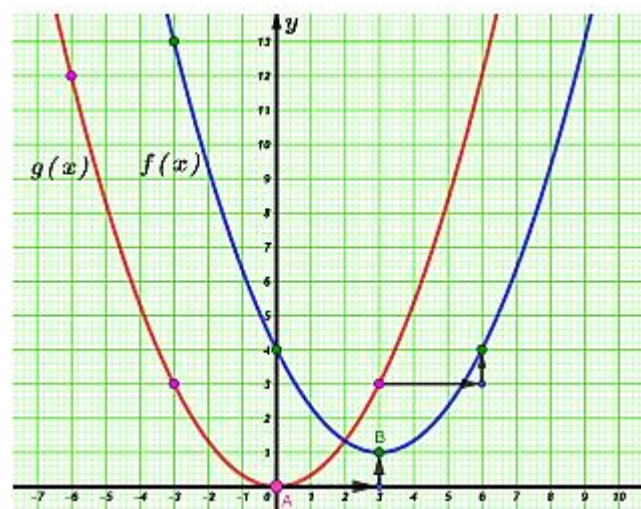
α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(i) $f(x) = g(x + 3) + 1$

(ii) $f(x) = g(x + 3) - 1$

(iii) $f(x) = g(x - 3) + 1$

(iv) $f(x) = g(x - 3) - 1$



(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

(Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

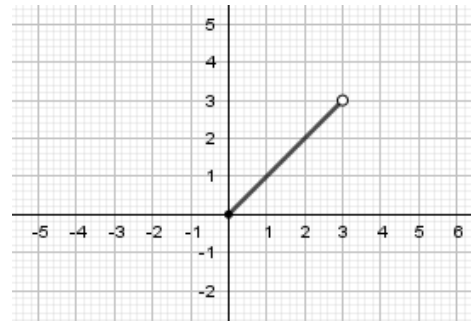
(Μονάδες 8)

15017. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 3)$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-2)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)

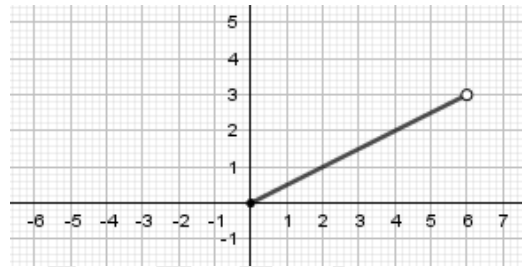


15018. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(\alpha, 6)$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$.

α) Να βρείτε την τιμή του α . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $f(-4)$. (Μονάδες 8)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 6)$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



15811. Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

i. να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια.

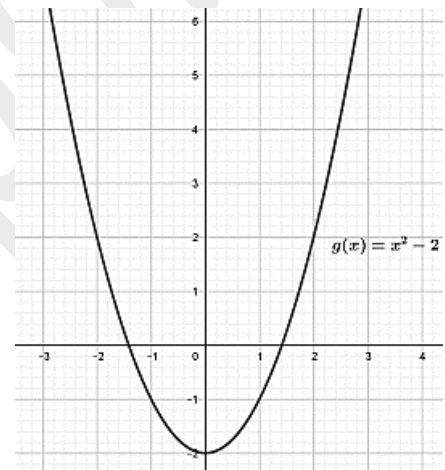
(Μονάδες 9)

ii. να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

(Μονάδες 9)



Θέμα 4ο

14242. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(5, 8)$, να δείξετε ότι

$a = \frac{3}{2}$ και $b = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Αν $g(x)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g . (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης

της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{\kappa}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ

($\kappa > 0$). (Μονάδες 8)

14973. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 4)

iii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση

$y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

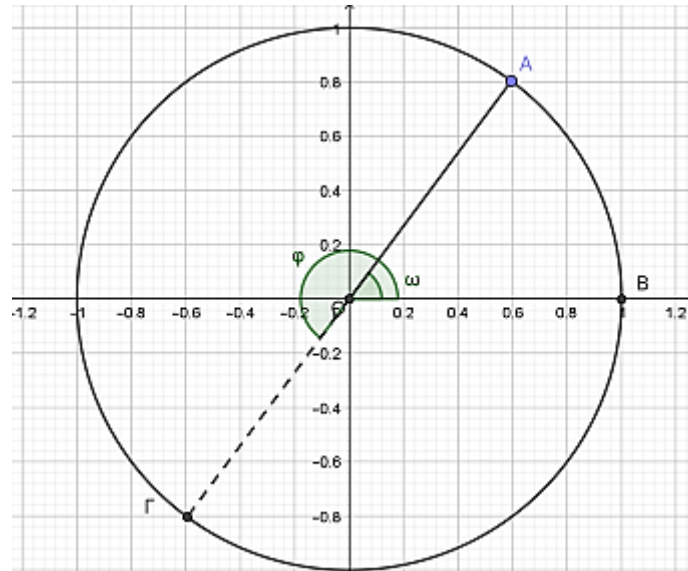
(Μονάδες 7)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Θέμα 2ο

15079. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\omega = \text{BOA}$.



α) Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί $\sin \omega = \frac{3}{5}$. (Μονάδες 8)

β) Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία $\varphi = \text{BOΓ}$ με την βοήθεια της γωνίας ω . (Μονάδες 8)

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το $\sin \varphi$. (Μονάδες 9)

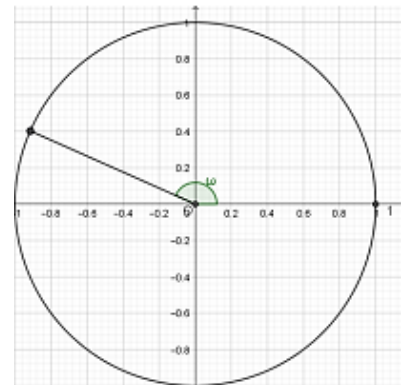
15191. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\eta\mu \omega = 0,4$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία $-\hat{\omega}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το $\eta\mu(-\omega)$.

(Μονάδες 13)



Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Θέμα 2ο

15046. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\sin A = -\frac{3}{5}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το $\eta\mu A$.

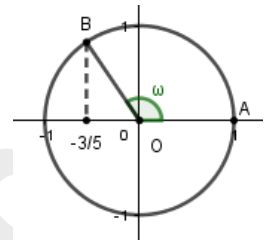
(Μονάδες 15)

15185. α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

β) Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, να βρείτε το $\eta\mu \omega$.

(Μονάδες 14)



15192. Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.

α) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί $\sin \omega = -\frac{3}{5}$.

(Μονάδες 12)

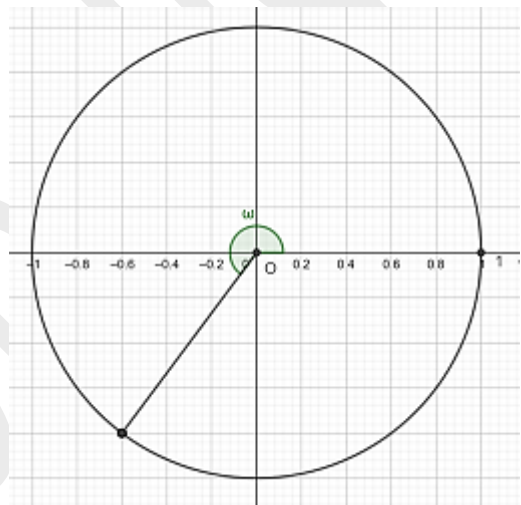
β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

i. $\eta\mu \omega$.

(Μονάδες 6)

ii. $\epsilon\phi \omega$

(Μονάδες 7)



15429. α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu 476^\circ = \eta\mu 116^\circ$.

(Μονάδες 11)

β) Αν γνωρίζουμε ότι το $\eta\mu 116^\circ$ είναι περίπου $\frac{9}{10}$, να υπολογίσετε το $\sin 116^\circ$.

(Μονάδες 14)

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

Θέμα 2ο

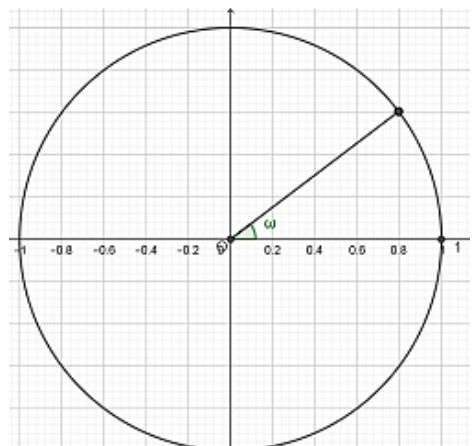
15193. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$, με $\sin \omega = 0,8$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα $[0, 2\pi]$, των οποίων το συνημίτονο είναι $-0,8$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο α) ερώτημα με την γωνία $\hat{\omega}$.

(Μονάδες 13)



14322.15652. Δίνεται $\eta\mu\varphi = \frac{3}{5}$, όπου φ η οξεία γωνία που

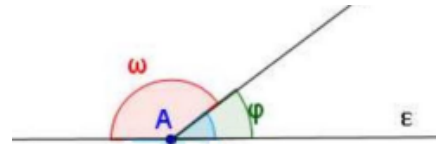
σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας ω του σχήματος.

(Μονάδες 15)



15092. Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία (δ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Η τελική πλευρά OB της θετικής γωνίας $\angle AOB = \hat{\theta}$, αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία (δ) στο σημείο Γ.

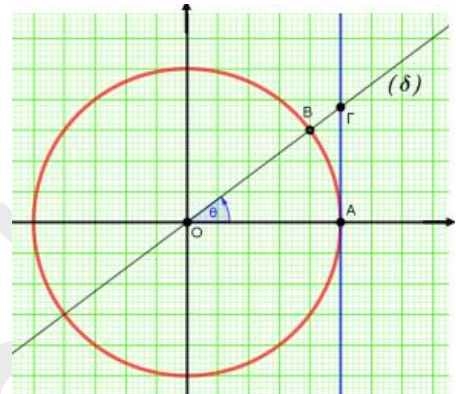
Γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.

(Μονάδες 13)

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ.

(Μονάδες 12)



15266. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες θ και $-\theta$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $\sigma\upsilon\eta\theta = \frac{3}{5}$

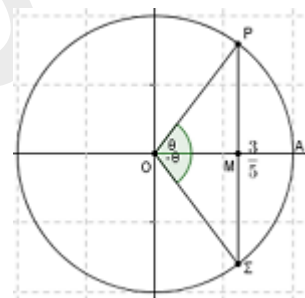
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\eta\mu\theta$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας $-\theta$.

(Μονάδες 8)



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

14233. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}\sigma\upsilon\eta 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της f;

(Μονάδες 9)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

(Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση μπορεί να πάρει την τιμή 1. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

14323. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\eta 2x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

(Μονάδες 12)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
2x					
$\sigma\upsilon\eta 2x$					
$f(x) = -3\sigma\upsilon\eta 2x$					

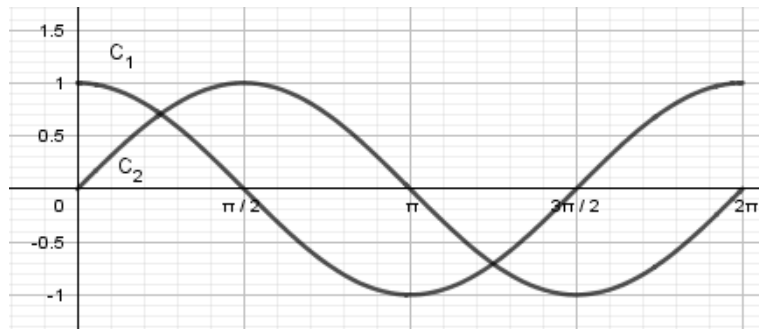
15091. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) i. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $f(2025\pi)$. (Μονάδες 8)

15644. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 για $x \in [0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \eta \mu x$ για $x \in [0, 2\pi]$

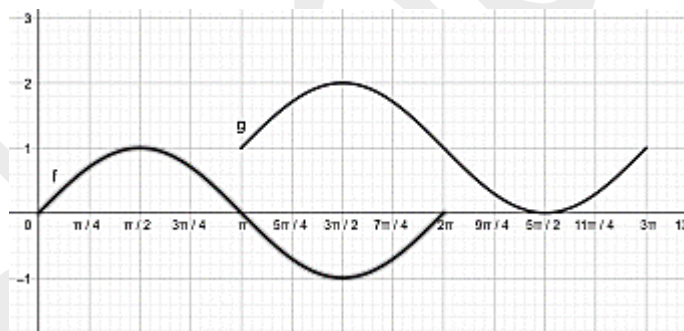
ποια από τις C_1 , C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και ποια της $g(x) = \eta \mu x$;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu x = \sin x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

(Μονάδες 15)

15788.



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta \mu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g που προέκυψε από την f με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις.

Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά. (Μονάδες 13)

β) i. τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της f από τις οποίες προέκυψε η g . (Μονάδες 6)

ii. τον τύπο της g . (Μονάδες 6)

Θέμα 4ο

14292. Η θερμοκρασία μιας περιοχής σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) κατά τη διάρκεια ενός

εικοσιτετράωρου δίνεται κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση: $f(t) = -8\sin\frac{\pi}{12}t + 4$ με

$0 \leq t \leq 24$ (t ο χρόνος σε ώρες).

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία κατά τη διάρκεια του εικοσιτετράωρου. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που η θερμοκρασία είναι ίση με 0°C . (Μονάδες 6)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την f για $t \in [0, 24]$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, πότε η θερμοκρασία είναι πάνω από 0°C .

(Μονάδες 5)

14291. Ένα σώμα ταλαντώνεται κατακόρυφα στο άκρο ενός ελατηρίου. Η απόσταση του σώματος από το έδαφος (σε cm), δίνεται από την συνάρτηση: $f(t) = 2\eta\mu\frac{\pi t}{4} + 13$, όπου t ο χρόνος σε ώρες.

α) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την απόσταση του σώματος από το έδαφος τις χρονικές στιγμές $t = 5$ και $t = 8$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε κατά το χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = 8$, ποια χρονική στιγμή η απόσταση του σώματος από το έδαφος είναι ελάχιστη. Ποια είναι η απόσταση αυτή;

(Μονάδες 10)

14290. Ένα παιγνίδι κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι. Το ύψος του από το πάτωμα σε cm συναρτήσει του χρόνου t (sec) δίνεται από τη σχέση: $h(t) = a \cdot \sin(\omega t) + \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$ και $\omega > 0$.

Το ελάχιστο ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα είναι 20cm και το μέγιστο 100cm. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το ύψος παίρνει την ελάχιστη τιμή του και ο χρόνος μιας πλήρους ταλάντωσης (θέσεις: ελάχιστο – ηρεμία – μέγιστο – ηρεμία – ελάχιστο) είναι 6 sec.

α) Να δείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{3}$.

(Μονάδες 5)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των a και β αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος του παιχνιδιού από το πάτωμα 14sec μετά την έναρξη της ταλάντωσης.

(Μονάδες 8)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(t)$, για $0 \leq t \leq 12$.

(Μονάδες 6)

14239. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + k$, με ρ, k πραγματικές σταθερές και $\omega > 0$.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f

(Μονάδες 3)

ii. την περίοδο T της συνάρτησης f

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών ρ, ω και k . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι $\rho = 3$, $\omega = \frac{1}{2}$ και $k = 2$, να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη x_0 του σημείου $A\left(x_0, \frac{7}{2}\right)$ της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα.

(Μονάδες 10)

14238. Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$ και $0 \leq t \leq 180$.

α) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος.

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας.

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και :

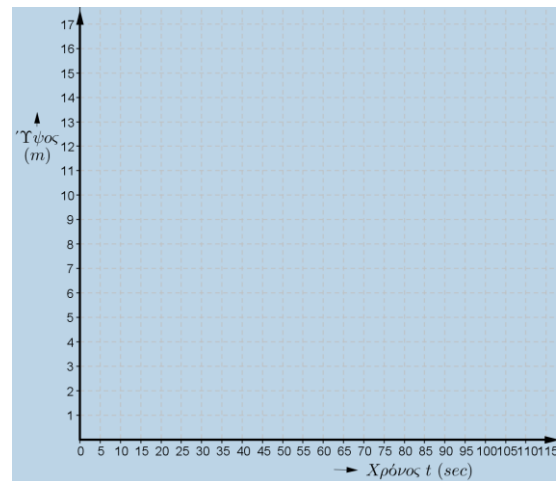
- i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους $h(t)$.

(Μονάδες 3)

t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

- ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(t)$ με $0 \leq t \leq 90$.

(Μονάδες 5)



15062. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι της μορφής $f(x) = \rho \eta\mu(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ και $a, \rho > 0$.

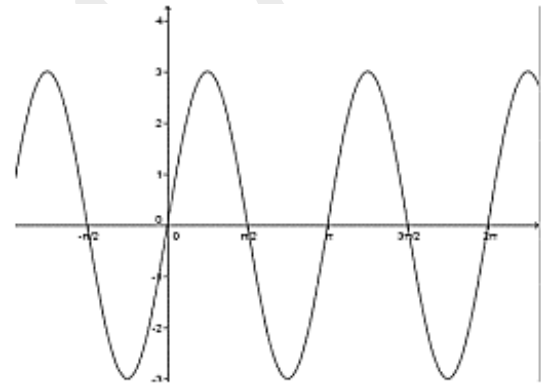
α) Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

β) Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς a και ρ . (Μονάδες 6)

Έστω $\rho = 3$ και $a = 2$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των f , g δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)



ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Θέμα 2ο

14231. α) Είναι η τιμή $x = \frac{\pi}{3}$ λύση της εξίσωσης $\sin x - \frac{1}{2} = 0$;

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\sin x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

(Μονάδες 12)

14232. Δίνεται γωνία ω που ικανοποιεί τη σχέση: $(\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu\omega)^2 = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\omega = 0$ είτε $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω .

(Μονάδες 12)

14280. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή;

(Μονάδες 15)

14324. Έστω γωνία x για την οποία ισχύουν: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x + \eta\mu(\pi - x) = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την γωνία x .

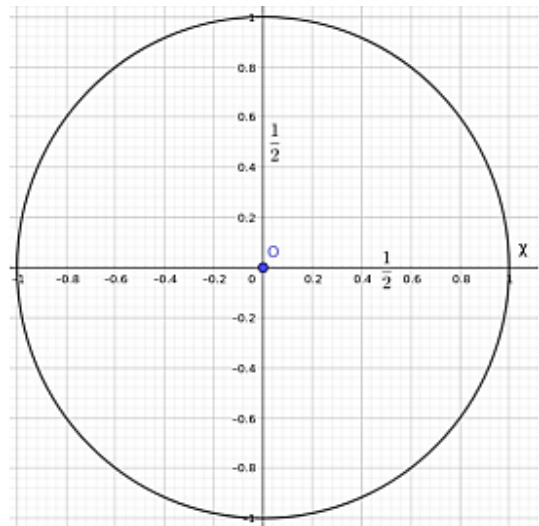
(Μονάδες 13)

14977.α) Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)



14282.α) Να δείξετε ότι $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x) = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in [0, 2\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\sigma\upsilon\nu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

(Μονάδες 15)

15969. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(13\pi + x) = -\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4\sigma\upsilon\nu x$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 4ο

15003. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \eta\mu ax \cdot \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sigma\upsilon\nu ax \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi - ax) - 1, a \in \mathbb{R}.$$

α) i. Να δείξετε ότι $f(x) = 2\eta\mu ax, x \in \mathbb{R}$.

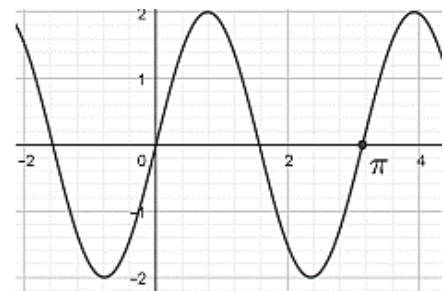
(Μονάδες 10)

ii. Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι $a = 2$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$.

(Μονάδες 9)



15014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\eta\mu bx$, με a, b ακέραιους θετικούς αριθμούς.

α) Να βρείτε την τιμή του a , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

β) Αν $a = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του b για την οποία $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $b = 8$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $a = 2$ και $b = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 9)

15025. Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία $\theta = \angle AOM$ με $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$, της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο M και την ευθεία $x = 1$ στο σημείο K.

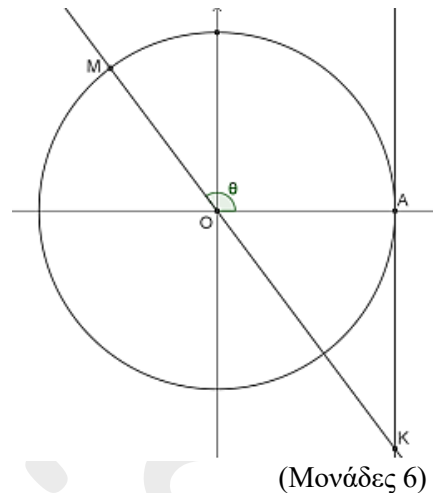
α) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin\theta$, $\epsilon\phi\theta$, $\sigma\phi\theta$.
(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και K.
(Μονάδες 6)

γ) Έστω μια γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$ για την οποία ισχύει $\eta\mu\phi = \frac{3}{5}$ και $\sin\phi < 0$.

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ϕ έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.
(Μονάδες 5)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί $\theta < \phi$.



(Μονάδες 6)

15026. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1-x) - 1)^2 = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

15049. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sin x - \eta\mu x$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

i. Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$. (Μονάδες 6)

15050. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$. (Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (Μονάδες 6)

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 6)

15289. Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) i. Αν $\lambda = -1$, να λύσετε το σύστημα. (Μονάδες 2)

ii. Αν (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος για $\lambda = -1$, να βρείτε γωνία $\theta \in (0, 2\pi]$ τέτοια, ώστε

$x_0 = \sin\theta$ και $y_0 = \eta\mu\theta$. (Μονάδες 4)

β) Αν $\lambda = 1$ και (x_1, y_1) είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία ω ,

τέτοια ώστε $x_1 = \sin\omega$ και $y_1 = \eta\mu\omega$. (Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση την (x_2, y_2) με

$$x_2 = \sin \varphi \text{ και } y_2 = \eta \mu \varphi, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

i. Να δείξετε ότι $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ και $\eta \mu \varphi = \frac{4}{5}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

15287. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta \mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0$, $\rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα,

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$.

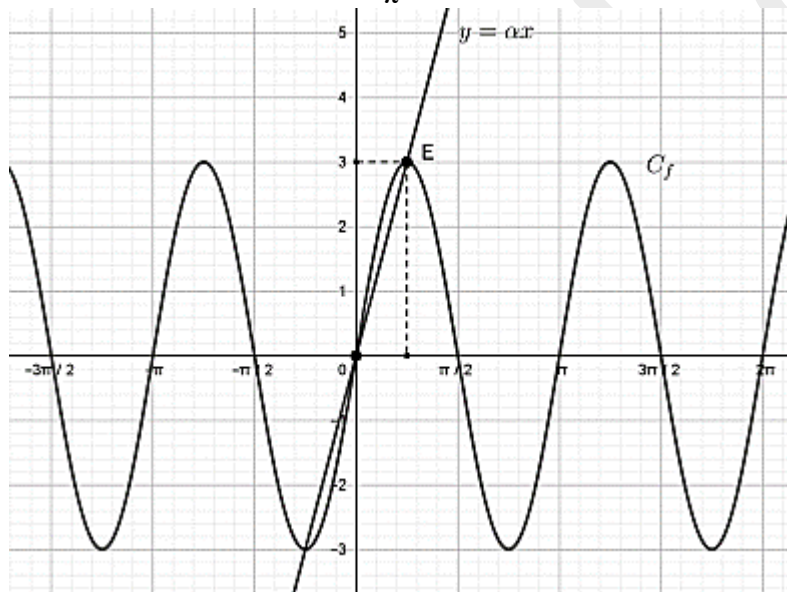
(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3\eta \mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$.

(Μονάδες 10)



15347. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sin^2(\pi - x) - 3\eta \mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Για $\alpha = 2$ και $g(x) = 2\eta \mu^2 x + 9\sin x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 7)

15422. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta \mu(\pi + 2x)$, $\alpha > 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (\alpha + 2)\eta \mu 2x$.

(Μονάδες 5)

β) i. Αν η μέγιστη τιμή της f είναι 4, να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε την περίοδο της f .

(Μονάδες 5)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f σε διάστημα μιας περιόδου.

(Μονάδες 5)

δ) Αν $g(x) = 5 - \sin^2 2x$, να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της C_f με την C_g , όπου C_f, C_g οι γραφικές παραστάσεις των f, g αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

Πολύωνυμα**Πολύωνυμα****Θέμα 2ο**

15113. Δίνονται τα πολύωνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = ax^2 + 7$, $a \in \mathbb{R}$.

α) Είναι το πολύωνυμο $P(x)$ 3ου βαθμού; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του a , ώστε τα πολύωνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα. (Μονάδες 12)

Διαίρεση πολυωνύμων**Θέμα 2ο**

14981. Δίνεται το πολύωνυμο $P(x) = x^3 - x + 6$.

α) Να υπολογίσετε το $P(-2)$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το $x + 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. (Μονάδες 10)

15012. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$ έχει πηλίκο $x^2 + 2$ και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$. (Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

15642. Δίνεται το πολύωνυμο $P(x) = 2(x-1)^{20} - 3(x-1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολύωνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$. (Μονάδες 10)

β) i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$. (Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις**Θέμα 2ο**

15040. Δίνεται η εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα της. (Μονάδες 5)

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 - 7x + 6) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 7x + 6 = 0$. (Μονάδες 10)

15047. Δίνεται το πολύωνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολύωνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα. (Μονάδες 15)

15246. Δίνεται το πολύωνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 15)

15247. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (2x - 1)(x^2 + 1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. (Μονάδες 15)

15248. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $2x - 1$ δίνει πηλίκο $x^2 - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$. (Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$. (Μονάδες 7)

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 6)

15618.α) Να γράψετε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - x$ ως γινόμενο ενός πρωτοβάθμιου και ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 15)

15653. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$.

α) i. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $(x + 1)$. (Μονάδες 8)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$. (Μονάδες 5)

β) Αν $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 12)

15654. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 13)

15674. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$. (Μονάδες 12)

15695. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$. (Μονάδες 12)

17241. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x + 2$.

α) I. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$. (Μονάδες 7)

II. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x + 1)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x + 1)(x^2 - x + 2)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 8)

Θέμα 4ο

14955. Η μέση θερμοκρασία T (σε βαθμούς Κελσίου) στην επιφάνεια ενός πλανήτη, μετά από x εκατομμύρια χρόνια, έχει εκτιμηθεί ότι είναι $T(x) = x^3 - 10x^2 + 31x - 30$.

α) Αποδείξτε ότι 2 εκατομμύρια χρόνια μετά, η μέση θερμοκρασία στον πλανήτη θα είναι μηδέν $^{\circ}\text{C}$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ με $\alpha < \beta < \gamma$ ώστε να ισχύει $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.

(Μονάδες 10)

γ) Θεωρούμε ότι μια χρονική περίοδος παγετώνων στον πλανήτη είναι αυτή στην οποία η μέση θερμοκρασία T είναι συνεχώς κάτω από μηδέν $^{\circ}\text{C}$. Ποιες χρονικές περιόδους θα έχουμε παγετώνες στον πλανήτη;

(Μονάδες 10)

15005. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα x' .

(Μονάδες 10)

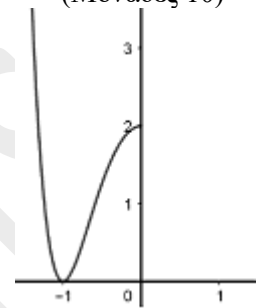
γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f για $x \leq 0$.

Να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

(Μονάδες 4)

δ) Με βάση τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)



15037. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .

(Μονάδες 4)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

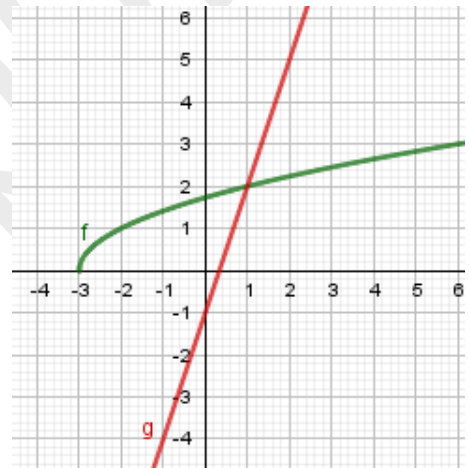
(Μονάδες 6)

γ) i. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του i ερωτήματος.

(Μονάδες 8)



15066. Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Ο αριθμός 0 δεν είναι ρίζα του.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του, τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε ένα θετικό ακέραιο αριθμό που να είναι ρίζα του.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 5)

15094. Το διάστημα $S(t)$ σε μέτρα που έχει διανύσει ένα κινητό τη χρονική στιγμή σε δευτερόλεπτα, δίνεται από τη σχέση: $S(t) = 2t^3 - 6t^2 + 10t$.

α) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 2$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε πόσο χρόνο χρειάζεται το κινητό για να διανύσει απόσταση 30 μέτρων.

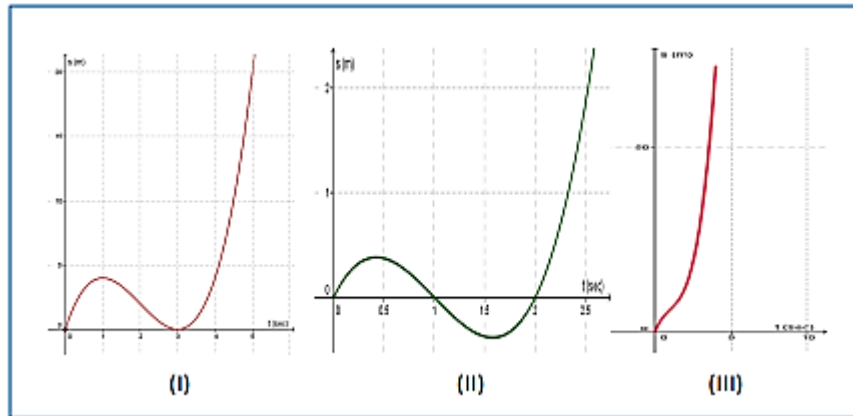
(Μονάδες 10)

γ) Επειδή το $S(t)$ εκφράζει το διάστημα που διανύει το κινητό, θα πρέπει να είναι πάντα μη αρνητικό. Να αποδείξετε αλγεβρικά αυτόν τον ισχυρισμό.

(Μονάδες 08)

δ) Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών πολυωνύμων $S(t)$. Μία από αυτές εκφράζει το διάστημα $S(t)$ της εκφώνησης. Να βρείτε ποια από τις τρεις είναι αυτή, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)



15250. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + ax + \beta$ το οποίο διαιρούμενο με το $x^2 - 4$ δίνει υπόλοιπο $4x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές των a και β .

(Μονάδες 7)

γ) Έστω $a = 4$ και $\beta = 5$. Αν το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το $\pi(x) = x^3 - 1$, τότε:

i. να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$.

(Μονάδες 4)

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 4x + 1$.

(Μονάδες 7)

15431.α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + ax^2 + \beta x - 5$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x - 1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με $(x - 2)$ είναι -1 ,

να δείξετε ότι: $\begin{cases} 2a + \beta = -6 \\ \text{και} \\ a + \beta = 3 \end{cases}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $a = -9$ και $\beta = 12$.

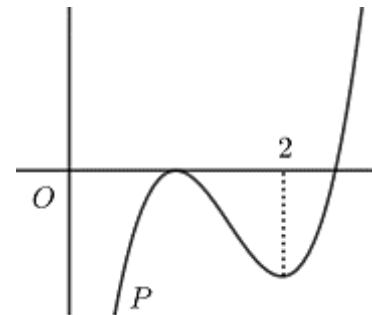
(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν η γραφική παράσταση της $P(x)$ είναι η διπλανή, να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

(Μονάδες 4)



15677. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + ax + \beta$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τίσ τιμές των a, β , αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο

$$Q(x) = x^2 - 2x + 1.$$

(Μονάδες 8)

β) Για $a = 4, \beta = -2$

i. Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 + 5)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $P(x) = (x^2 + 5)(x^2 - 2x - 6) + 14x + 28$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 14(x + 2)$.

(Μονάδες 9)

15960. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + kx - 1$, $k \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Για $k = 0$,

i. να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

(Μονάδες 6)

ii. να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

- iii. να βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
(Μονάδες 7)

Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές

Θέμα 4ο

15270. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την μονοτονία της και την μέγιστη τιμή της.
(Μονάδες 6)

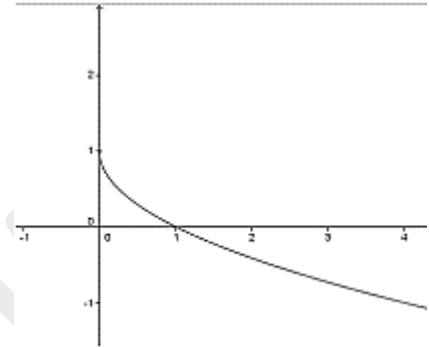
- β) Αν $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$ και $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$, να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $P = (2f(\alpha) - 1)(2f(\beta) - 1)$.

(Μονάδες 10)

- γ) Έστω ότι η συνάρτηση του προβλήματος είναι η

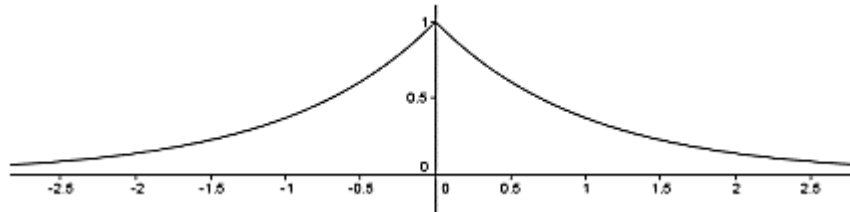
$f(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ευθεία $y = 2x$.

(Μονάδες 9)



Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση**Εκθετική συνάρτηση****Θέμα 4ο**

15269. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f διπλού τύπου.



α) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση αντιστοιχεί σε μια ακριβώς από τις παρακάτω συναρτήσεις να επιλέξετε ποιος είναι ο τύπος της συνάρτησης f .

$$A. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$B. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την μέγιστη τιμή της. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε, για τις διάφορες τιμές του a , το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = a$, $a \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να αιτιολογήσετε γιατί το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης C_f της f με την παραβολή $y = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$ είναι το σημείο $(0, 1)$. (Μονάδες 5)

Λογάριθμοι**Θέμα 2ο**

15687. Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 13)

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης A . (Μονάδες 12)

15816. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2, \beta = \ln 4, \gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$. (Μονάδες 13)

Θέμα 4ο

15251. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (a-2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό a . (Μονάδες 6)

β) Για $a=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

(Μονάδες 6)

15474. Δίνεται η πολωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = ex + 4$. (Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $P(e) - e^2 - 4$. (Μονάδες 4)

15822. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + \beta x^2 + x$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$ το οποίο το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$. (Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$. (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$. (Μονάδες 6)

15823. Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 3ο

15392. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 5^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Μια ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H\left(0, \frac{1}{5}\right)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 8)

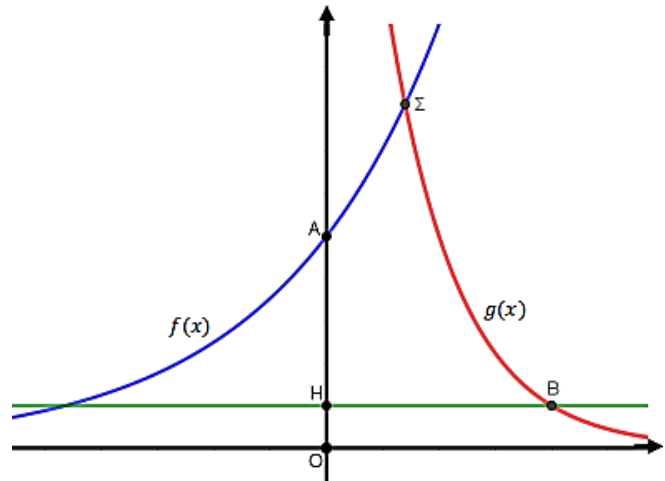
β) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Σ.

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι x_B, x_Σ οι τετμημένες των σημείων B, Σ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$x_B - x_\Sigma = \log 20$$

(Μονάδες 7)



Λογαριθμική συνάρτηση

Θέμα 2ο

15267. Δίνεται η εξίσωση $\log(x^2 + 1) = 1 + \log 3 - \log 6$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση γράφεται $\log(x^2 + 1) = \log 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 13)

15393. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ και δύο άλλων συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ που προέκυψαν από μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $f(x)$.

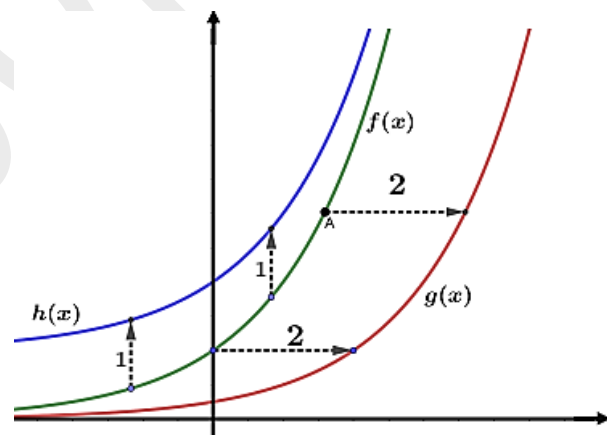
α) Να εξηγήσετε με τι είδους μετατοπίσεις προέκυψαν οι γραφικές παραστάσεις των $g(x)$ και $h(x)$ από την γραφική παράσταση της $f(x)$.

(Μονάδες 8)

β) Να γράψετε τους τύπους των συναρτήσεων $g(x)$ και $h(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τετμημένη του σημείου A της γραφικής παράστασης της f του οποίου η τεταγμένη είναι 16.



(Μονάδες 9)

15675. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 15)

17318. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το $f(3)$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $\ln 3 + 3 \ln 2 - f(3) = \ln 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 4$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 4ο

15015. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

- α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Μονάδες 7)
 β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$. (Μονάδες 8)
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$. (Μονάδες 10)

15021. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$. (Μονάδες 6)
 γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$. (Μονάδες 7)
 δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

15679. Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x - 3}\right)$.

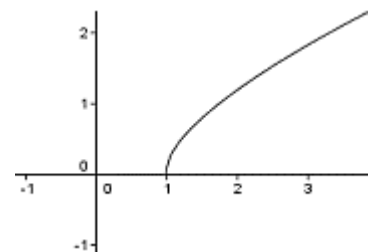
- α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2 - 1}{\omega - 3} > 0$. (Μονάδες 8)
 β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A . (Μονάδες 8)
 γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$. (Μονάδες 9)

15690. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 5)
 β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$. (Μονάδες 6)
 γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$. (Μονάδες 7)
 δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$. (Μονάδες 7)

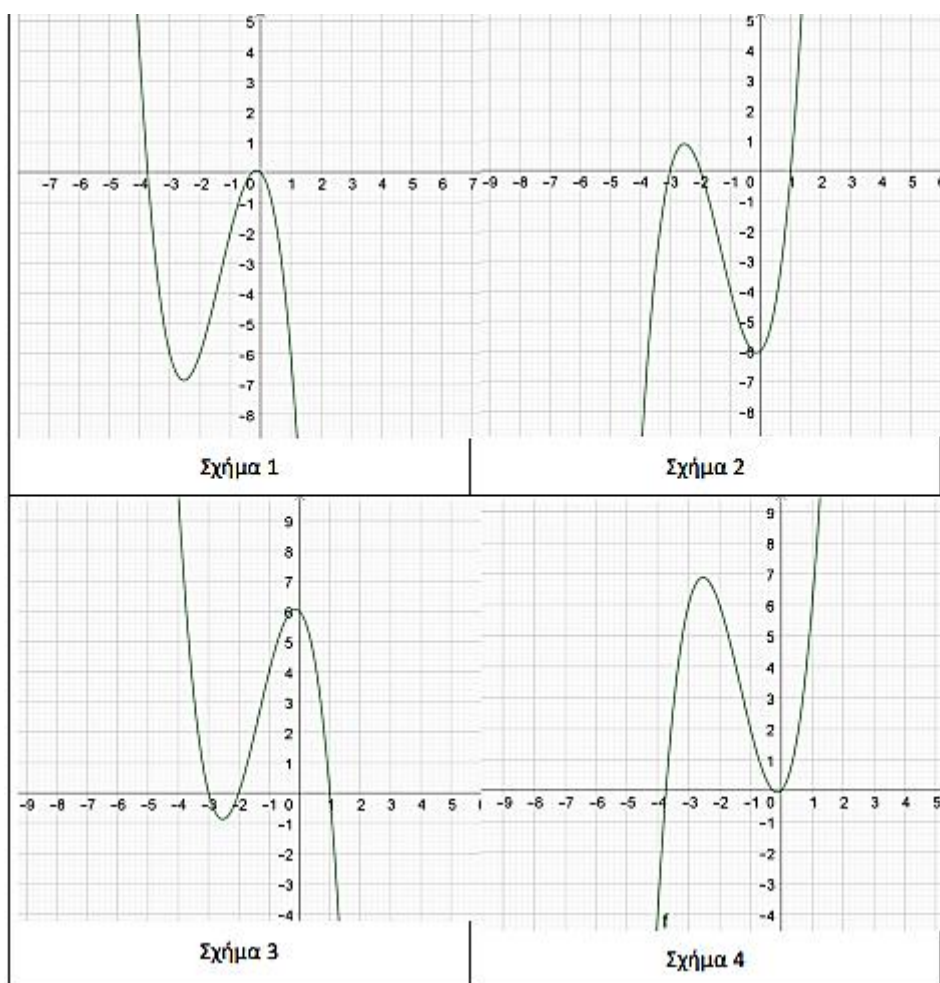
16001. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ και $g(x) = \sqrt{\ln x}$.

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. (Μονάδες 4)
 β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω. (Μονάδες 5)
 Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .
 γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 4)
 ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$. (Μονάδες 5)
 δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$. (Μονάδες 7)



15678. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.

- α) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. (Μονάδες 10)
 β) Από τα παρακάτω σχήματα, ένα μόνο μπορεί να αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$. Να βρείτε ποιο αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
 γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωσή $P(x) = \ln x$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$. (Μονάδες 8)



Θέμα 3ο

15676. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (Μονάδες 7)
β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x' . (Μονάδες 8)
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον x' . (Μονάδες 10)